



TITLE:

Shift Functionについて (Generic構造とその応用)

AUTHOR(S):

若井, 健太郎

CITATION:

若井, 健太郎. Shift Functionについて (Generic構造とその応用). 数理解析研究所講究録 2004, 1390: 54-56

ISSUE DATE:

2004-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25834>

RIGHT:

Shift Function について

東海大学理学部情報数理学科 若井 健太郎 (Kentaro Wakai)

Department of Mathematical Sciences,
Tokai University

\mathbb{Q} は有理数全体の集合とする. $x, y \in \mathbb{Q}^\omega$ に和 $+$ と 1 変数関数 σ を次のように定義する.

$$(x + y)(i) = x(i) + y(i)$$

$$\sigma(x)(i) = x(i + 1)$$

つまり, 和は各成分の和, σ は成分を 1 つずらす関数である. この σ を shift function と呼ぶことにする. $(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ の性質について考える.

1 Quantifier Elimination

$(\mathbb{Q}^\omega, +)$ が divisible であることと, σ が $+$ を保存することから, パラメータ $\bar{a} \in \mathbb{Q}^\omega$ を持つ positive atomic formula は次の形をしていると考えてよい

$$\sum_{i=0}^n q_i \sigma^i(x) = t(\bar{a})$$

ただし $q_i \in \mathbb{Q}$ で, t は term である. これを n 次の多項式

$$f = \sum_{i=0}^n q_i \sigma^i \in \mathbb{Q}[\sigma]$$

を使って

$$f(x) = t(\bar{a})$$

とも書くことにする. $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{Q}$ を任意に取り, 漸化式

$$\sum_{i=0}^n q_{m+i} b_{m+i} = t(\bar{a})_m$$

を満たすように b_n, b_{n+1}, \dots をとれば, (b_0, b_1, \dots) は $f(x) = t(\bar{a})$ の解になる. すなわち

Proposition 1 任意の positive atomic formula は高々可算個の解を持つ.

f が n 次なら, b の最初の n 項を自由にとることができる. このとき解の自由度は n であるということにする.

2 個の positive atomic formula の共通解については次のことがわかる.

Proposition 2 $f, g \in \mathbb{Q}[\sigma]$, $a, b \in \mathbb{Q}^\omega$ とする. h を f と g の最大公約数, $f = f_0h$, $g = g_0h$, $f_0p + g_0q = 1$ ($p, q \in \mathbb{Q}[\sigma]$) とする. このとき次は同値である.

- $f(x) = a$ と $g(x) = b$ は共通解を持つ
- $f_0b = g_0a$

また, 共通解は $h(x) = pa + qb$ の解になっている.

これを繰り返せば任意有限個の positive atomic formula の共通解は 1 つの positive atomic formula で表せる.

これと解の自由度を考えると次もわかる.

Proposition 3 $f, g_i \in \mathbb{Q}[\sigma]$, $a, b_i \in \mathbb{Q}^\omega$ とする.

$$f(x) = a \wedge g_0(x) \neq b_0 \wedge \cdots \wedge g_n(x) \neq b_n$$

は

- $f(x) = a$ と $g_i(x) = b_i$ の共通解の次数が f の次数と同じ i があれば解なし
- そうでなければ高々可算個の解をもつ

これらのことより次がわかる.

Theorem 4 $Th(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ で quantifier を消去することができる.

Corollary 5 $(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ は quasi-minimal, ω -stable である. ただし quasi-minimal とは任意の definable set が countable または co-countable になることである.

また, type について次のことがわかる.

Proposition 6 $(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ の complete type は次の 2 つのどちらかと同値である. $f, g_i \in \mathbb{Q}[\sigma]$, $a, b_i \in \mathbb{Q}^\omega$ とする.

- $\{f(x) = a\} \cup \{q_i(x) = b_i : i \in I\}$ (positive atomic formula 1 つとあとは negative atomic formula, b_i は a をパラメータとする positive atomic formula の解)
- $\{q_i(x) = b_i : i \in I\}$ (全部 negative atomic formula)

2 Saturation

type $p = \{\sigma(x) = x\} \cup \{x \neq q(1, 1, \dots) : q \in \mathbb{Q}\}$ は \mathbb{Q}^ω で解を持たない。パラメータは $(1, 1, \dots)$ だけだから

Proposition 7 $(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ は ω -saturated でない。

$(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ と同様に $((\mathbb{Q}^n)^\omega, +, \sigma)$ も $\text{Th}(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ のモデルになる。 $((\mathbb{Q}^n)^\omega, +, \sigma)$ たちの間に自然な埋め込みを考えると, p は $((\mathbb{Q}^2)^\omega, +, \sigma)$ で解を持つが, $((\mathbb{Q}^2)^\omega, +, \sigma)$ 上 $((\mathbb{Q}^2)^\omega, +, \sigma)$ で解を持たない type を作ることができる。同様に,

Proposition 8 • $((\mathbb{Q}^n)^\omega, +, \sigma)$ は ω -saturated でない。

- $((\mathbb{Q}^n)^\omega, +, \sigma)$ 上の type は $((\mathbb{Q}^{n+1})^\omega, +, \sigma)$ で解を持つ。

これより

Theorem 9 $\cup_{i < \omega} ((\mathbb{Q}^i)^\omega, +, \sigma)$ は $\text{Th}(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$ の quasi-minimal ω -saturated extension.

である。また, type の形が限定されていることより

Theorem 10 同じ非可算濃度の $\text{Th}((\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma))$ の quasi-minimal ω -saturated model は同型である。

がわかる。

参考文献

- [IW1] Masanori ITAI and Kentaro WAKAI, *On quasi-minimal structures*, Kokyuroku of the Research Institute of Mathematical Sciences in Kyoto, vol. 1213 (2001), pp. 50-54
- [IW2] Masanori ITAI and Kentaro WAKAI, *Quasi-minimal structures and uncountable categoricity*, Proc. Sch. of Sci, Tokai Univ., Vol. 37(2002), pp. 1-8
- [IW3] Masanori ITAI and Kentaro WAKAI, *ω -saturated quasi-minimal models of $\text{Th}(\mathbb{Q}^\omega, +, \sigma)$* , preprint
- [ITW] Masanori ITAI, Akito TSUBOI, and Kentaro WAKAI, *Construction of saturated quasi-minimal structure*, to appear in JSL
- [MR] David Marker, **Model Theory**, Graduate Texts in Mathematics vol. 217, Springer, 2002